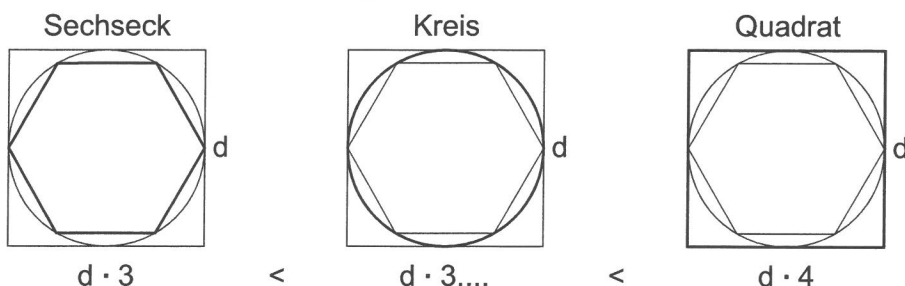


1. Umfang des Kreises

Der Kreis ist eine gekrümmte Linie, der Umfang kann daher nicht mit einem Lineal abgemessen werden.

1.1 Grobe Abschätzung



Der Umfang des Kreises ist größer als ein eingeschriebenes Sechseck und kleiner als ein umgeschriebenes Quadrat, der Umfang liegt daher zwischen $d \cdot 3$ und $d \cdot 4$.

1.2 Die Zahl π

Ein Versuch.

Wähle Gegenstände, die von wenigstens einer kreisrunden Fläche begrenzt sind (zB Blumentopf, zylindrisches Glas, CD ...).

Miss den Kreisumfang mit einem Maßband oder einer nicht dehnbaren Schnur ab.

Miss den Durchmesser des Kreises mit Hilfe von zwei Geodreiecken und einem Lineal ab.

Berechne den Quotienten Kreisumfang durch Durchmesser.

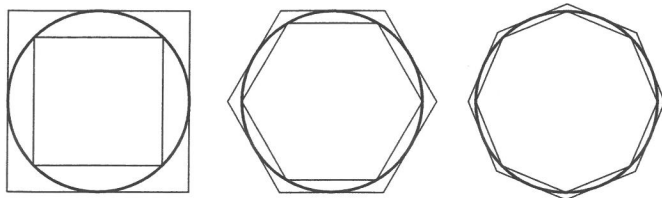
Gegenstand	Kreisumfang in mm	Durchmesser des Kreises in mm	Kreisumfang durch Durchmesser

Die Messungen bei diesem Versuch sind ungenau, dennoch lautet der Quotient $\frac{u}{d}$ jeweils 3,

Mit mathematischen Methoden lässt sich diese Zahl π genauer berechnen:

Wenn man bei einem Kreis regelmäßige Vielecke einschreibt bzw. umschreibt und von diesen die Umfänge berechnet, erhält man Schranken für den Umfang des Kreises.

Je mehr Ecken diese Vielecke haben, umso genauer wird der Näherungswert für die Zahl π .



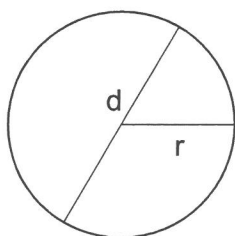
Archimedes von Syrakus lebte im 3. Jahrhundert vor Christus, er war ein bedeutender Mathematiker, Physiker und Techniker der griechischen Antike.

Ohne Computer oder Taschenrechner errechnete er mit Hilfe des ein- und umgeschriebenen regelmäßigen 96-Ecks die bereits sehr genaue Abschätzung für die Zahl π .

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

π (pi) ist der 16. Buchstabe des griechischen Alphabets.

1.3 Formel für den Umfang



Durch Umformung von $\frac{u}{d} = \pi$ erhält man die Formel für den Umfang des Kreises.

$$\frac{u}{d} = \pi \quad | \cdot d$$

$$u = d \cdot \pi$$

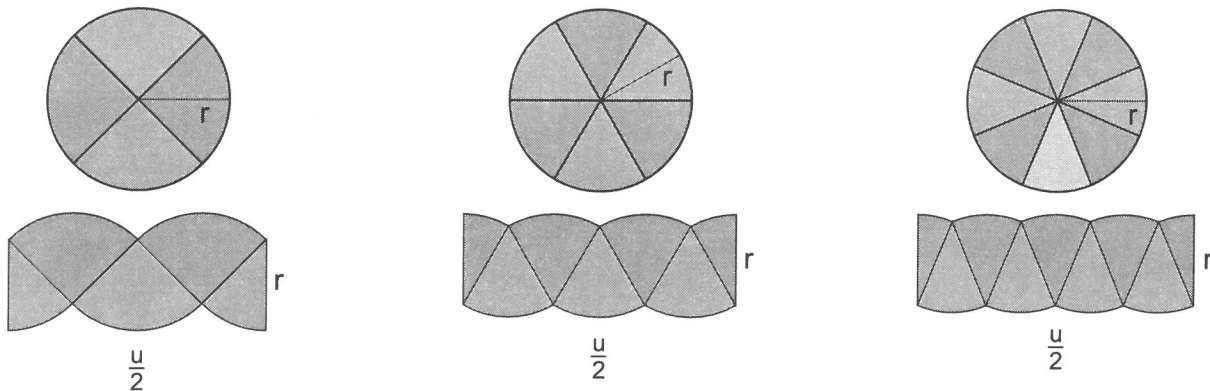
$$u = 2 \cdot r \cdot \pi$$

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433...$$

Die Zahl π ist eine irrationale Zahl (unendlich viele Dezimalen, nicht periodisch, nicht als Bruch darstellbar).

2. Flächeninhalt des Kreises

2.1 Herleitung der Formel



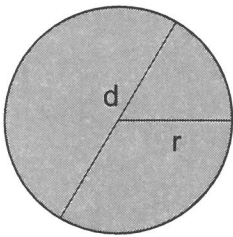
Wenn man einen Kreis in 4, 6, 8, ... gleich große Sektoren zerlegt und diese entsprechend der Abbildung nebeneinander legt, erhält man eine Figur, die sich immer mehr einem Rechteck nähert, je größer die Anzahl der Sektoren ist.

Der halbe Kreisumfang entspricht der Länge des Rechtecks, der Kreisradius der Breite des Rechtecks.

$$A_{\square} = \frac{u}{2} \cdot r = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{2} \cdot r = r^2 \cdot \pi$$

Der Flächeninhalt des Kreises ist gleich groß wie der Flächeninhalt des "Rechtecks".

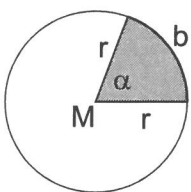
2.2 Formel für den Flächeninhalt



$$A = r^2 \cdot \pi$$

$$A = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi \quad A = \frac{d^2}{4} \cdot \pi$$

3. Kreisbogen und Kreissektor



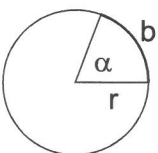
α ... Zentriwinkel

b ... Kreisbogen

Der Kreisbogen b ist ein Teil des Kreisumfangs.

Der Kreissektor ist von zwei Radien und dem Kreisbogen begrenzt.

3.1 Länge des Kreisbogens



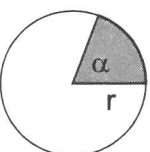
Voller Kreis, $\alpha = 360^\circ$: $u = 2r \cdot \pi$

Zentriwinkel $\alpha = 1^\circ$: $b = \frac{1}{360} \cdot \frac{2r \cdot \pi}{180} = \frac{r \cdot \pi}{180}$

Zentriwinkel α° : $b = \frac{1}{360} \cdot \frac{2r \cdot \pi \cdot \alpha}{180} = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180}$

Je größer der Zentriwinkel, um so länger ist - bei gleich großem Umfang - der Kreisbogen.

3.2 Flächeninhalt des Kreissektors



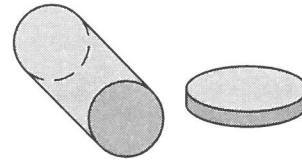
Voller Kreis, $\alpha = 360^\circ$: $A = r^2 \cdot \pi$

Kreissektor, Zentriwinkel $\alpha = 1^\circ$: $A = \frac{r^2 \cdot \pi}{360}$

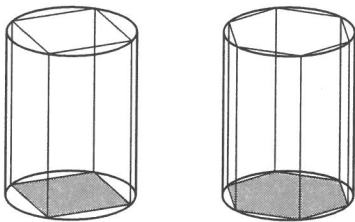
Kreissektor, Zentriwinkel α° : $A = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$

1. Eigenschaften

- Grund- und Deckfläche sind kongruente Kreise.
- Der abgewinkelte Mantel ist ein Rechteck.
- Der Drehzylinder wird kurz *Zylinder* genannt.



2. Volumen



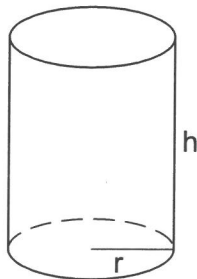
$$V = G \cdot h$$

$$V = G \cdot h$$

Die Grundfläche eines Prismas ist ein Vieleck.

Volumen eines Prismas gleich Grundfläche mal Höhe.

Würde man Zylindern regelmäßige Prismen mit immer mehr Ecken einschreiben, könnte man immer genauere Näherungswerte für das Volumen des Zylinders berechnen.



Die Grundfläche eines Zylinders ist ein Kreis.

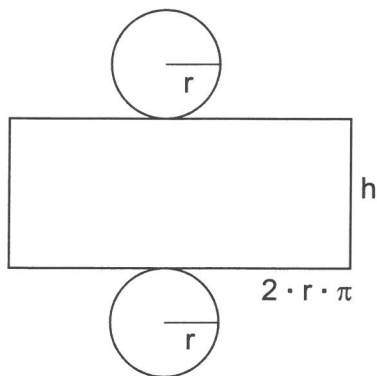
Volumen eines Zylinders gleich Grundfläche mal Höhe.

$$V = G \cdot h$$

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

Mit Methoden der höheren Mathematik kann die Volumensformel bewiesen werden.

3. Oberfläche



Die Grundfläche eines Zylinders ist ein Kreis.

Oberfläche eines Zylinders gleich zweimal Grundfläche plus Mantel.

$$O = 2 \cdot G + M$$

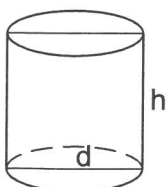
$$O = 2 \cdot G + u_G \cdot h$$

$$O = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$$

$$O = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (r + h)$$

Sowohl die Oberfläche als auch die Größe der Oberfläche (Oberflächeninhalt) werden in diesem Buch kurz „Oberfläche“ genannt.

4. Gleichseitiger Zylinder



$$h = d$$

$$h = 2 \cdot r$$

Bei einem gleichseitigen Zylinder ist die Höhe gleich lang wie der Durchmesser. Schneidet man einen Zylinder längs einer seiner Symmetrieebenen normal zur Grundfläche, erhält man einen Achsenschnitt.

Der Achsenschnitt eines gleichseitigen Zylinders ist ein Quadrat.

$$V = G \cdot h$$

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot r$$

$$V = 2 \cdot r^3 \cdot \pi$$

$$O = 2 \cdot G + M$$

$$O = 2 \cdot G + u_G \cdot h$$

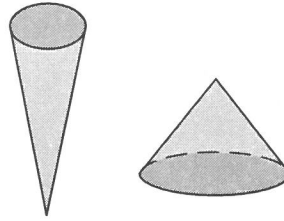
$$O = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot 2 \cdot r$$

$$O = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 4 \cdot r^2 \cdot \pi$$

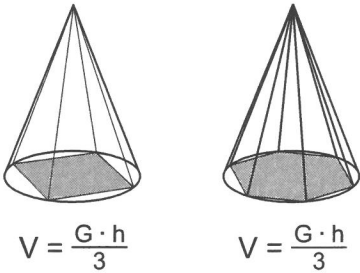
$$O = 6 \cdot r^2 \cdot \pi$$

1. Eigenschaften

- Die Grundfläche ist ein Kreis.
- Der abgewinkelte Mantel ist ein Kreissektor.
- Der Drehkegel wird kurz *Kegel* genannt.



2. Volumen



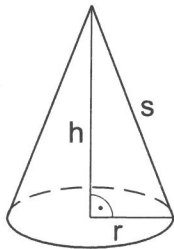
$$V = \frac{G \cdot h}{3}$$

$$V = \frac{G \cdot h}{3}$$

Die Grundfläche einer Pyramide ist ein Vieleck.

Volumen einer Pyramide gleich Grundfläche mal Höhe durch drei.

Würde man Kegeln regelmäßige Pyramiden mit immer mehr Ecken einschreiben, könnte man immer genauere Näherungswerte für das Volumen des Kegels berechnen.



Die Grundfläche eines Kegels ist ein Kreis.

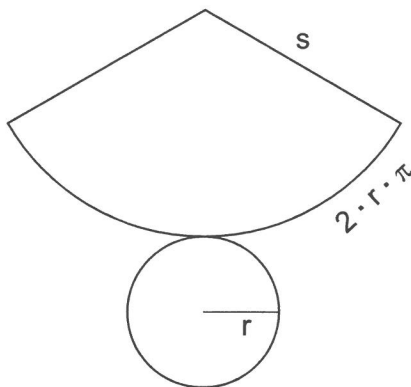
Volumen eines Kegels gleich Grundfläche mal Höhe durch drei.

$$V = \frac{G \cdot h}{3}$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}$$

Mit Methoden der höheren Mathematik kann die Volumensformel bewiesen werden.

3. Oberfläche



Die Grundfläche eines Kegels ist ein Kreis.

Oberfläche eines Kegels gleich Grundfläche plus Mantel.

$$O = G + M$$

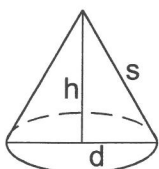
$$O = G + \frac{u_G \cdot s}{2}$$

$$O = r^2 \cdot \pi + \frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot s}{2}$$

$$O = r^2 \cdot \pi + r \cdot \pi \cdot s$$

$$O = r \cdot \pi \cdot (r + s)$$

4. Gleichseitiger Kegel



$$s = d$$

$$s = 2 \cdot r$$

Bei einem gleichseitigen Kegel ist die Mantellinie gleich lang wie der Durchmesser. Der Achsenschnitt eines gleichseitigen Kegels ist ein gleichseitiges Dreieck.

$$h = \frac{s \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$h = r \cdot \sqrt{3}$$

$$V = \frac{G \cdot h}{3}$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sqrt{3}}{3}$$

$$V = \frac{r^3 \cdot \pi \cdot \sqrt{3}}{3}$$

$$O = G + M = G + \frac{u_G \cdot s}{2}$$

$$O = r^2 \cdot \pi + \frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot 2 \cdot r}{2}$$

$$O = r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r^2 \cdot \pi$$

$$O = 3 \cdot r^2 \cdot \pi$$